⋆

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Exprimer A en fonction de I et d'une matrice B vérifiant $B^2 = 0$, puis en déduire une expression de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n.

⋆

Exercice 2

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer J^n en fonction de n.
2) Dans chaque cas, exprimer la matrice A en fonction de I_3 et J puis en déduire une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

⋆

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Exprimer A^n en fonction de n et a.

⋆

Exercice 4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $A^3 - A^2 - A + I_3 = 0$.
2) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

⋆

Exercice 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^2 - 4A$. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer son inverse par un calcul simple.

⋆ ⋆

Exercice 6

On considère les suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 1 \\ y_0 & = & 0 \\ z_0 & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 5x_n + 6z_n \\ y_{n+1} & = & -x_n + 2y_n - 2z_n \\ z_{n+1} & = & -x_n + y_n - z_n \end{array}\right.$$

On note $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
3) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
4) Montrer que $PAP^{-1} = D$ avec D une matrice diagonale.
5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P^{-1}D^nP$
6) En déduire une expression de A^n en fonction de n, puis une expression de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

$\star$
Exercice 7

Déterminer le rang des matrices suivantes. Préciser lesquelles sont inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 \\ -6 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -7 & 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\star$
Exercice 8

Dans chaque cas déterminer les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles A est inversible

1) $A = \begin{pmatrix} 1+x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$ 3) $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 2 \\ 1 & 2 & 1-x \\ x & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\star$
Exercice 9

1) Montrer que la somme de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
2) Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
   On pourra utiliser la caractérisation suivante : $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est triangulaire supérieure si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$

$\star$
Exercice 10

Soit A une matrice telle que $\mathrm{tr}({}^tAA) = 0$. Que peut-on dire de A ?

$\star$
Exercice 11

On dit qu'une matrice carrée A est **nilpotente** s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $A^p = 0$. Soit A une matrice nilpotente non nulle et p le plus petit entier tel que $A^p = 0$.

1) Justifier que A n'est pas inversible.
2) Calculer $(A - I)(I + A + \cdots + A^{p-1})$. Que peut-on en déduire sur $A - I$?

$\star\star\star$
Exercice 12

On dit qu'une matrice carrée est stochastique si ses coefficients sont des réels positifs et que la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1, autrement dit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si les deux conditions suivantes sont remplies :

- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ a_{i,j} \geq 0$
- $\forall i \in [\![1,n]\!], \ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$

Notons $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices stochastiques de taille n et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur colonne de taille n ne contenant que des 1.

1) Soit $A, B \in \mathcal{E}_n$. Montrer que $AB \in \mathcal{E}_n$
2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs. Montrer que $A \in \mathcal{E}_n \iff AU = U$
3) Soit $A \in \mathcal{E}_n$. Montrer que la matrice $A - I$ n'est pas inversible.
4) Soit $A \in \mathcal{E}_n$ telle que A est inversible. Montrer que $A^{-1}U = U$. Dans quel cas a-t-on $A^{-1} \in \mathcal{E}_n$?

$\star$
Exercice 13

Soit A une matrice carrée de taille n. Montrer l'équivalence suivante :

$$A = I_n \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad AX = X$$

★

Exercice 14

1) Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$
2) Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$
3) Montrer qu'il n'existe aucun couple de matrices $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $AB - BA = I$.

★ ★

Exercice 15

Soient $n, m, p, q \in \mathbb{N}^*$ et soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ et $C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
Montrer que $A(BC) = (AB)C$.

★ ★

Exercice 16

On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est

- symétrique si $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = a_{j,i}$
- antisymétrique si $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]$ $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

1) Montrer qu'une matrice A est symétrique si et seulement si ${}^tA = A$, et antisymétrique si et seulement si ${}^tA = -A$.
2) Soient S et T deux matrices symétriques. Montrer que ST est symétrique si et seulement si $ST = TS$.
3) Soient M et N deux matrices antisymétriques, montrer que MN est antisymétrique si et seulement si $MN = -NM$.

★

Exercice 17

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ deux matrices telles que $\forall X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, $AX = BX$. Montrer que $A = B$.

★ ★ ★

Exercice 18

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX)$. Montrer que $A = B$.